ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ РАБОТЕ С ПАРАМЕТРАМИ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

Ананьина Т.А.
СУНЦ, г. Екатеринбург

Аннотация

На конкретной теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами» представлена логика и содержание деятельности учащихся, которая способствует формированию знаний и умений в предметной области и развитию метапредметной составляющей образовательного процесса, связанной с исследовательской деятельностью.

Ключевые слова: уравнения и неравенства с параметром, признаки проектной деятельности, анализ новой ситуации,

Цель углубленного математического образования традиционно состоит в развитии интереса, обобщении, систематизации и углублении знаний и умений, а также в подготовке к продолжению образования. Кроме того, в настоящее время значительно усиливается целевая роль углубленного образования в формировании научного мировоззрения, то есть в формировании «совокупности взглядов, оценок, принципов и образных представлений, определяющих самое общее видение, понимание мира, места в нем человека…» [2].

Для достижения поставленных целей при работе с одаренными учащимися, с нашей точки зрения, следует организовать деятельность, направленную:

- на формирование умений «прочитать» практическую, реальную ситуацию через «призму» имеющихся знаний,
- на осознание задачи,
- на самостоятельную формулировку задачи.

Выполнение выделенной деятельности позволяет учащимся зафиксировать желаемый результат, и приступить к поиску средств достижения поставленной познавательной цели. При этом очень важно, чтобы реализация поставленных для достижения цели задач приводила не только к разрешению конкретной реальной ситуации, но и позволяла, в какой-либо степени, качественно изменить понимание школьника о процессе организации такой деятельности в дальнейшем.

Обобщение опыта, накопленного нами при организации учебно-познавательной деятельности учащихся с указанными особенностями, позволяет нам сформулировать положение о том, что эффективным методом в рассматриваемом контексте является проектная деятельность, признаки которой выделены К.Н. Поливановой [1]:

· ориентация на получение конкретного результата;

· предварительное описание результата в виде эскиза;

· относительно жесткая фиксация срока достижения результата;

· предварительное планирование во времени действий, обеспечивающих достижения общего результата проекта;

· выполнение действий с их одновременным мониторингом и коррекцией;

· получение продукта проектной деятельности, его соотнесение с исходной ситуацией проектирования, *анализ новой ситуации*.

Особое внимание в представленных признаках обратим на *формирование умения проводить анализ вновь возникающей ситуации*, который, с нашей точки зрения, является главной целью организации проектной деятельности школьника, а уровень учеников, углубленно изучающих математику, позволяет организовать такую работу на предметном материале.

Проиллюстрируем выдвинутые положения на примере темы «Решение уравнений и неравенств с параметрами».

Работа с параметрами проходит особой, завершающей линией по всем алгебраическим темам школьного курса углубленного изучения математики. Чаще всего задачи с параметрами не самоцель, они являются средством обобщения и систематизации изучаемого в данный момент математического объекта в зависимости от конкретно возникающей ситуации. В итоге, после изучения темы, многие учащиеся «научиваются» решать определенные (рассмотренные на уроках) задачи с параметрами; многие осознают, в какой именно момент необходимо рассматривать особенности, варианты поведения математического объекта, в зависимости от разных значений параметра. Но только некоторые учащиеся способны абстрагироваться в дальнейшем от конкретной темы и применять полученные знания и умения наряду с вновь изучаемыми свойствами параметров. Большинство школьников, неплохо решая параметры в конкретных темах, не могут решить контрольную работу с параметрами в задачах из разных тем. Они теряются, в голове возникает полная путаница, и у учеников не получается применить полученные ранее знания на практике.

Ученик, направляемый учителем, осознает необходимость организации своей работы с параметрами как-то по-другому, его не устраивает прежний подход, так как в большинстве случаев он оказывается малоэффективным. В сложившихся условиях появляется необходимость разработать «проект – как целенаправленное управляемое изменение, фиксированное во времени» (метанаучное понимание термина «проект») цель которого – преодоление возникшей проблемы.

Итак, если ученику понятны отдельно взятые задачи, но не понятна специфика изменений, происходящих в процессе решения задач с параметрами от темы к теме, то он, под руководством учителя, должен организовать свою проектную деятельность, задача которой состоит в преодолении возникших сложностей с параметрами. Целью такой деятельности являться понимание, как можно организовать свою деятельность в других аналогичных ситуациях.

Для того чтобы сосредоточить внимание на выделенной проблеме, мы предлагаем, рассматривая одинаковые выражения, помещать их в различные математические ситуации и сосредоточить внимание не на нахождении корней, а на анализе случаев появления ограничений параметра и синтезе всех возможных вариантов, а также на записи ответа.

Для этого школьник подбирает и решает простейшие линейные уравнения. В качестве примера рассматривает несколько уравнений и неравенств, содержащих одинаковые выражения. Подробно и стандартно оформляет решение сформулированного задания (итог решения задач выделен жирным шрифтом внутри текста).

1. *Решить уравнение*: $ax + a = 3$.

При $\boldsymbol{a = 0}$ **получаем уравнение** $0x = 3$. Это уравнение не имеет решения.

При $\boldsymbol{a \neq 0, x = \frac{3-a}{a}}$.

2. *Решить уравнение:* $(a-2)x = -4 + a^2$.

При $\boldsymbol{a = 2}$, $0x = 0$, $\boldsymbol{x}$ – любое действительное число.

При $\boldsymbol{a} \neq 2$ получаем результат $\boldsymbol{x = a + 2}$.

После разбора каждым учащимся решения линейных уравнений целесообразно провести работу по совместной формулировке основных выводов. И далее, проанализировав отдельно каждую вновь возникшую ситуацию, учащиеся совместно (или индивидуально) выделяют основные этапы решения и, обобщив, записывают рекомендации к решению такого вида примеров. Учитель оказывает необходимую помощь при выделении этапов и формулировке рекомендаций.

Итак, при решении линейных уравнений необходимо рассмотреть два случая:

• *коэффициент равен 0 , и уравнение либо не имеет решения, либо верно для любого действительного значения* x*;*

• *коэффициент не равен 0, и неизвестная выражается через параметр.*

Не меняя выражения, далее ставится задача «Решить линейные неравенства».

3. *Решить неравенство*: $ax + a \leq 3$.

При $\boldsymbol{a = 0}$ **получаем неравенство** $0x \leq 3$. Это неравенство верно для любого действительного значения $\boldsymbol{x}$.

При $\boldsymbol{a} > 0$ получаем $\boldsymbol{x \leq \frac{3-a}{a}}$.

При $\boldsymbol{a} < 0$, $\boldsymbol{x \geq \frac{3-a}{a}}$.

4. *Решить неравенство*: $(a-2)x > -4 + a^2$.

При $\boldsymbol{a = 2}$, $0x > 0$. Это неравенство не имеет решения.

При $\boldsymbol{a} > 2$ имеем $\boldsymbol{x > a + 2}$.

При $\boldsymbol{a} < 2$ получаем $\boldsymbol{x < a + 2}$, так как обе части неравенства разделили на отрицательный коэффициент.

Рассмотрен новый тип примеров, и каждый ученик вновь записывает основные рекомендации к решению, в данном случае, линейных неравенств.

При решении линейных неравенств необходимо рассмотреть три случая:

• *коэффициент равен 0, и неравенство либо не имеет решения, либо верно для любого действительного значения* x*;*

• *коэффициент больше 0, и знак неравенства не меняется, неизвестная сравнивается с выражением, содержащим параметр,*

• *коэффициент меньше 0, и знак неравенства меняется.*

Записав линейные выражения, с которыми работали при решении уравнений и неравенств, в числитель и знаменатель нового уравнения, ученик решает уже дробно-линейное уравнение с параметром, обращая особое внимание на особенности этого процесса, что помогает ему систематизировать имеющиеся знания и умения, сравнивать и фиксировать происходящие изменения в решении уравнения при появлении знаменателя.

5. *Решить уравнение*: $\frac{(a-2)x-(a^2-4)}{ax+a-3}=0.$

Рассмотрим знаменатель дроби.

При $a=0$ знаменатель никогда не обращается в 0. При этом a решим уравнение $(a-2)x=a^2-4$, т.е. $x=2$.

При $a=2$, уравнение принимает вид $\frac{0x-0}{2x-1}=0$. $x\in R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

При $a\neq 0$, $a\neq 2$ необходимо решить систему $\begin{cases}(a-2)x-(a^2-4)=0,\\ ax+a-3\neq 0.\end{cases}$ или систему $\begin{cases}x=a+2,\\ x\neq\frac{3-a}{a}.\end{cases}$

Вначале рассмотрим случай, когда $x=a+2$ является посторонним корнем.

Решим уравнение относительно параметра $a+2=\frac{3-a}{a}$, получаем при $a=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ необходимо исключить в записи ответа $x=a+2$. То есть дополнить значения параметра, при котором $x=a+2$ является посторонним корнем.

Вывод*: решение такого вида уравнения сводится:*

• *к нахождению корней из числителя, если это позволяет сделать параметр;*

• *к выяснению, при каких значениях параметра эти корни становятся посторонними, так как обращают знаменатель в 0.*

Далее ученик анализирует, что происходит, если вместо знака «=» стоит знак «≥», и чем отличается решение дробного неравенства от решения дробного уравнения.

Приведем решение неравенства для продолжения работы ученика.

6. *Решить неравенство*: $\frac{(a-2)x-(a^2-4)}{ax+a-3}\geq 0.$

Решим дробно линейное неравенство методом интервалов.

Рассмотрим выражение в знаменателе. Как и в примере 5, при $a = 0$ знаменатель никогда не обращается в 0. Неравенство принимает вид $\frac{(-2)x-(-4)}{-3} \geq 0$, то есть $x \geq 2$.

ОДЗ: при $a \neq 0$, $x = \frac{3-a}{a}$.

Найдем корни многочлена из числителя.

При $a = 2$ корней нет, неравенство принимает вид: $\frac{0x-0}{2x-1} \geq 0$. Получаем результат, как и в примере 5, $x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

При $a \neq 2$ корень $x = a + 2$.

Необходимо рассмотреть три случая.

1. Пусть $a < 0$.

1.1. Рассмотрим случай $a + 2 > \frac{3-a}{a}$, умножим обе части неравенства на $a < 0$. Выставляем точки на числовую прямую, расставляем знаки в промежутках. Выбираем положительные промежутки.

При $a < \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ получаем $x \in (-\infty; \frac{3-a}{a}) \cup [a+2; +\infty)$

1.2. $\frac{3-a}{a} > a + 2$, умножим на $a < 0$. $x \in (-\infty; a+2] \cup (\frac{3-a}{a}; +\infty)$.

2. Пусть $0 < a < 2$.

Проведём сравнение как в случае (1) и получим, что эти числа при $0 < a < 2$ могут быть расположены только так: $a + 2 > \frac{3-a}{a}$, выбираем положительный промежуток, значит $x \in (\frac{3-a}{a}; a + 2]$.

3. Пусть $a > 2$. Для данных значений параметра всегда имеем $a + 2 > \frac{3-a}{a}$, при всех $a > 2$, если $x < \frac{3-a}{a}$ и $x > a + 2$, то $\frac{(a-2)x-(a^2-4)}{ax+a-3} \geq 0$. То есть при условии $a > 2$ ответом для данного неравенства является совокупность промежутков: $x \in (-\infty \frac{3-a}{a}) \cup [a + 2; -\infty)$.

В итоге работы ученик формулирует следующие рекомендации:

Решать дробные неравенства с параметром удобно методом интервалов. Особенности работы с такими задачами заключатся в том, что:

• *приравнивая коэффициенты, содержащие параметр, в числителе и знаменателе дроби к нулю, получаем отдельные случаи при конкретных значениях* a*;*

• *при выставлении значений* x *правее или левее на числовой прямой, получаем отдельные условия.*

Кроме приведенных примеров такой проект должен содержать решение систем, функций, уравнений и неравенств высших степеней, иррациональных уравнений и неравенств и других математических ситуаций.

Организовать предложенную индивидуальную проектную деятельность можно с достаточно большим количеством учеников и по разным темам в соответствии с возникающими проблемами. При этом отметим, что подобрать или придумать задачный материал – посильная работа для математически одаренных учащихся, однако систематизировать, обобщать полученные результаты и делать выводы даже для таких обучаемых сложная задача, которая, всякий раз, требует индивидуальной помощи учителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поливанова К.Н. Проектная деятельность школьника: пособие для учителя. – М. : Просвещение, 2011. 149 с.
2. Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki.